LINEARE ALGEBRA

Vektoren und Vektorraum

Teil 2

Aufgabensammlung aus der Datei 61101 mit allen Lösungen

Stand 1. Juli 2011

Datei Nr. 61 102

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Grundlagen der Vektorrechnung wurden im Text 61101 behandelt.
Dazu gab es in diesem Text 19 Aufgaben.

Hier in 61102 sind diese Aufgaben nochmals als Aufgabensammlung zusammengestellt, zusammen mit allen Lösungen.

Aufgabensammlung zur Vektorrechnung

1 (a) Gegeben sind diese Vektoren des R^2:

$\vec{a} = (3|1)$, $\vec{b} = (-2|5)$ und $\vec{c} = (1|0)$

Berechne daraus $\vec{d} = 4\vec{a} - 7\vec{b}$, $\vec{e} = -3\vec{b} + 5\vec{c}$ und $\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b} - 6\vec{c}$

(b) Gegeben sind die vier Vektoren des R^3

$\vec{a} = (4|1|-1)$, $\vec{b} = (1|0|2)$, $\vec{c} = (-2|2|3)$ und $\vec{d} = (-1|1|0)$

Berechne damit diese Linearkombinationen:

$\vec{x}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{c}$, $\vec{x}_2 = \vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$, $\vec{x}_3 = 10\vec{a} - 5\vec{b} - 7\vec{c} + 3\vec{d}$

$\vec{x}_4 = \frac{3}{4}\vec{c}$, $\vec{x}_5 = 4\vec{d} - 2\vec{a} + 3\vec{b}$ $\vec{x}_6 = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} - 4\vec{d}$.

2 (c) Gegeben sind diese Vektoren des R^4:

$\vec{a} = (3|1|0|5), \vec{b} = (2|-1|1|2), \vec{c} = (3|5|1|1), \vec{d} = (0|1|0|-7)$.

Berechne daraus $\vec{x}_1 = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d}$, $\vec{x}_2 = 4\vec{a} - 2\vec{c} + 3\vec{d}$,

$\vec{x}_3 = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} - 4\vec{d}$

2. Stelle den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar:

(a) $\vec{x} = (-8|16)$, $\vec{a} = (2|5)$, $\vec{b} = (-4|2)$

(b) $\vec{x} = (2|5)$, $\vec{a} = (-5|4)$, $\vec{b} = (3|7)$

(c) $\vec{x} = (5|8)$, $\vec{a} = (2|4)$, $\vec{b} = (3|6)$

3. Stelle den Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar:

(a) $\vec{x} = (5|5|-8)$, $\vec{a} = (4|1|-1)$, $\vec{b} = (3|2|4)$, $\vec{c} = (1|0|-3)$

(b) $\vec{x} = (7|5|-3)$, $\vec{a} = (1|1|0)$, $\vec{b} = (0|1|1)$, $\vec{c} = (1|0|1)$

(c) $\vec{x} = (7|6|-2)$, $\vec{a} = (8|4|-2)$, $\vec{b} = (6|-9|12)$, $\vec{c} = (5|1|3)$

(d) $\vec{x} = (4|-2|0)$, $\vec{a} = (1|-2|-3)$, $\vec{b} = (1|1|2)$, $\vec{c} = (1|-1|-1)$

(e) $\vec{x} = (4|0|3)$, $\vec{a} = (1|-2|-3)$, $\vec{b} = (2|1|2)$, $\vec{c} = (1|3|4)$

4. Jetzt lässt sich $\vec{x}$ entweder auf beliebige viele Arten oder gar nicht als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ darstellen:

(a) $\vec{x} = (3|2|3)$, $\vec{a} = (1|-2|-3)$, $\vec{b} = (2|1|2)$, $\vec{c} = (1|3|5)$

(b) $\vec{x} = (7|-4|-5)$, $\vec{a} = (1|-2|-3)$, $\vec{b} = (2|1|2)$, $\vec{c} = (1|3|5)$

(c) $\vec{x} = (12|6|4)$, $\vec{a} = (6|3|2)$, $\vec{b} = (4|5|-3)$, $\vec{c} = (2|-2|5)$

(d) $\vec{x} = (1|6|4)$, $\vec{a} = (6|3|2)$, $\vec{b} = (4|5|-3)$, $\vec{c} = (2|-2|5)$

5. Bilde folgende Vektoren eine Basis des $\mathbf{R}^3$?

a) $\vec{a}=(1|4|3),\ \vec{b}=(3|1|-1),\ \vec{c}=(0|1|5)$

b) $\vec{a}=(1|3|-1),\ \vec{b}=(2|-1|0),\ \vec{c}=(0|-7|2)$

c) $\vec{a}=(4|3|0),\ \vec{b}=(3|4|0),\ \vec{c}=(0|0|5)$

d) $\vec{a}=(4|6|-8),\ \vec{b}=(1|5|3),\ \vec{c}=(-6|-9|12)$

e) $\vec{a}=(4|6|-8),\ \vec{b}=(1|5|3),\ \vec{c}=(0|0|0)$

6. Bestimme k so, dass die Vektoren unabhängig sind:

a) $\vec{a}=(1|4|3),\ \vec{b}=(3|1|-1),\ \vec{c}=(0|1|k)$

b) $\vec{a}=(1|k|0),\ \vec{b}=(k|1|-1),\ \vec{c}=(0|1|1)$

c) $\vec{a}=(k|3|0),\ \vec{b}=(3|k-1|0),\ \vec{c}=(0|2|1)$

7. Zeige, dass die folgenden Vektoren des R^2 abhängig sind:

a) $\vec{a}=(3|1),\ \vec{b}=(2|-2)$ und $\vec{c}=(5|0)$

b) $\vec{a}=(2|-3),\ \vec{b}=(7|9)$ und $\vec{c}=(1|1)$

8. Sind folgende Vektoren linear abhängig oder unabhängig?

a) $\vec{a}=(3|3|9),\ \vec{b}=(2|2|4)$

b) $\vec{a}=(1|3|-6),\ \vec{b}=(-1|-3|6)$

c) $\vec{a}=(1|4|-6),\ \vec{b}=(-1|4|6)$

9) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix};\ \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ bzgl. einer Basis B_1.

a) Zeige, dass sie linear unabhängig sind.

b) Stelle den Vektor $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\6\\-1\\6\end{pmatrix}$ durch diese Vektoren dar.

c) Zeige, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ eine Basis B_2 des $\mathbf{R}^4$ bilden.

10) a) Zeige, dass $\vec{a} = (1|-1|5); \vec{b} = (2|-2|1); \vec{c} = (1|3|0)$ eine Basis des $\mathbf{R}^3$ bilden.

b) Welche Koordinaten hat der Vektor $\vec{d} = (5|0|-3)$ bezüglich dieser Basis?

c) Wie lautet der Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$

11) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (-2|1|0)$; $\vec{b} = (1|2|1)$; $\vec{c} = (0|5|2)$.

a) Zeige, dass $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$ keine Basis des $\mathbf{R}^3$ ist.

b) Stelle $\vec{d} = (-3|-1|-1)$ als Linearkombination durch $\vec{a}; \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar. (Anleitung: Wähle z = r ...)

c) Zeige, dass $\vec{e} = (0|5|-1) \notin [\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}]$ gilt.

12) Gegeben sind die Vektoren $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich einer (nicht näher genannten) Basis **B**.

a) Zeige, dass $\mathbf{B_1} = \{\vec{b_1}; \vec{b_2}; \vec{b_3}\}$ ebenfalls eine Basis des $\mathbf{R}^3$ ist .

b) Berechne die Koordinaten von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}_B$ bzgl. der Basis $\mathbf{B_1}$.

c) Bilden $\vec{x}; \vec{b_2}$ und $\vec{b_3}$ ebenfalls eine Basis des $\mathbf{R}^3$?

13) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ für $k \in R$ bezüglich einer Basis $\mathbf{B_1}$.

a) Für welche Werte von k bilden $\vec{a}; \vec{b}$ und $\vec{c_k}$ eine Basis $\mathbf{B_2}$ des $\mathbf{R}^3$?

b) Welche Koordinaten hat der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6k+6 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}_{B_1}$ bzgl. der Basis B_2?

c) Es sei $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ r \end{pmatrix}$. Für welches r ist $\vec{d} \in [\vec{a}; \vec{b}]$?

14) Für welche Werte stellen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_k} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbf{R}^3$ dar?

Welche Koordinaten hat $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis im Falle k = - 1?

15) a) Für welche k stellen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b_k} = \begin{pmatrix} -1 \\ k \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_k} = \begin{pmatrix} k \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbf{R}^3$ dar?

b) Welche Koordinaten hat $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2k \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis?

c) Überprüfe, ob im Falle k = 1 der Vektor $\vec{d}$ durch sie darstellbar ist und wenn ja, wie.

16) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, dass diese Vektoren eine Basis des $\mathbf{R}^4$ bilden.

b) Gilt $\vec{e} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \in [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$? Wenn ja, stelle ihn als Linearkombination dar.

c) Sind $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{e}$ linear unabhängig?

d) Für welches k gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ k \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \in [\vec{c}; \vec{d}]$?

17) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Basis $B_1 = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ des $\mathbf{R}^3$.

a) Zeige, dass $B_2 = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ auch eine Basis des $\mathbf{R}^3$ ist.

b) Bereche die Koordinaten der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bzgl. $\mathbf{B_1}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. $\mathbf{B_2}$. zur jeweils anderen Basis.

18) (Fortsetzung von Aufgabe 9)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzgl. einer Basis B_1.

d) Welche Koordinaten hat $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. B_2 in der Basis B_1?

e) Welche Koordinaten hat $\vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. B_1 in der Basis B_2?

19. Gegeben sind zwei Basen $B_1 = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$ und $B_2 = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ bezüglich einer nicht genannten gemeinsamen Basis B_3. Gibt es Vektoren, die bezüglich der Basen B_1 und B_2 dieselben Koordinaten besitzen?

a) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, und $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{a_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{a_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, und $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$; $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$